RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 giugno 1918.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sui motori sincroni senza eccitazione considerati come circuiti di autoinduzione variabile.* Nota del Corrispondente O. M. Corbino.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Analisi. — *Sopra l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali.* Nota di G. Armellini, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

1. Mi propongo di esporre in questa Nota un metodo per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali; metodo che io spero di poter applicare in Note seguenti ai problemi fondamentali della Meccanica celeste. Il procedimento da me ideato, come i lettori vedranno, è estremamente semplice. Ma poichè, non ostante le ricerche in proposito, non mi è stato possibile di rinvenirlo in alcun trattato o Memoria, e poichè d'altra parte mi sembra che esso possa essere utile non solo nella Meccanica celeste, ma anche in molti problemi pratici, mi sono deciso di comunicarlo all'Accademia.

2. Supponiamo dunque di avere un sistema differenziale di ordine m. Con procedimenti di natura algebrica noi possiamo immaginare di averlo ridotto ad un'equazione differenziale di ordine m tra la variabile indipendente x e la funzione incognita y:

$$(1) \qquad y^{(m)} = F(x, y, y', y'' \ldots y^{(m-1)}).$$

Supporremo che la (1) non si sappia integrare direttamente. Prendiamo allora sull'asse delle x un intervallo arbitrario p. es.

$$b \geqq x \geqq c \tag{2}$$

e proponiamoci di studiare in questo intervallo un integrale particolare y definito dalle condizioni iniziali

$$y = \lambda \quad y' = \lambda_1 \quad y'' = \lambda_2 \ldots y^{(m-1)} = \lambda_{m-1} \quad \text{per} \quad x = b$$

dove le λ_i sono grandezze date a piacere. È questo il problema che più interessa nei casi pratici.

Supporremo soltanto l'*esistenza* in tutto l'intervallo dato delle derivate $y^{(h)}$ di tutti gli ordini, e supporremo ancora che i valori che queste derivate assumono nel punto $x = b$ cioè

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1} \lambda_m \lambda_{m+1} \ldots \lambda_h \ldots$$

non tendano all'infinito al crescere di h. Queste condizioni sono verificate nella grandissima maggioranza dei casi pratici, e di più esse sono sufficienti ma non necessarie per l'applicabilità del metodo, onde il procedimento ha una portata più ampia.

Inutile aggiungere che tutte le λ debbono riguardarsi come quantità note; infatti noi conosciamo le prime $m - 1$ tra esse; derivando dunque la (1) e ponendovi $x = b$ abbiamo immediatamente λ_h qualunque sia l'indice h.

3. Ciò posto, noi ci proponiamo di risolvere il seguente problema:

Scelto ad arbitrio un numero n intero e positivo si domanda di determinare $n + 1$ coefficienti costanti $a_0 a_1 \ldots a_n$ in modo tale che, rappresentando l'integrale particolare y col polinomio

$$Y_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n , \tag{3}$$

l'errore medio della rappresentazione nell'intervallo arbitrario $b \geqq x \geqq c$ risulti minimo, rispetto ad ogni altro polinomio di grado n.

Chiameremo questo tale polinomio Y_n col nome di « *Polinomio di massima approssimazione di grado n* ».

Anzi tutto occorre dimostrare l'*esistenza* e l'*unicità* di un tale polinomio. A tale scopo basta ripetere, con poche modificazioni, l'analoga dimostrazione data nei Corsi di Analisi, per provare l'esistenza e l'unicità dei polinomi di Tchebicheff (1). Passiamo ora alla determinazione dei coefficienti.

4. Cominciamo ad osservare che senza togliere nulla alla generalità del metodo noi possiamo sempre supporre uguale allo zero quell'estremo dell'intervallo per cui non sono dati i valori della y e delle sue $m - 1$

(1) V. p. es. E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Ch. IV, pag. 82.

derivate. Nel nostro caso supporremo dunque $c = 0$ onde b sarà una quantità positiva.

Ciò posto indicando con k un intero positivo arbitrario costruiamoci l'integrale definito

$$S_k = \int_0^b y x^k \, dx . \tag{4}$$

Avremo, integrando per parti,

$$S_k = \left(\frac{y x^{k+1}}{k+1}\right)_0^b - \frac{1}{k+1}\int_0^b y' x^{k+1} \, dx = \left(\frac{y x^{k+1}}{k+1}\right)_0^b -$$

$$- \left(\frac{y' x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\right)_0^b + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_0^b y'' x^{k+2} \, dx =$$

$$= \left(\frac{y x^{k+1}}{k+1}\right)_0^b - \left(\frac{y' x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\right)_0^b + \left(\frac{y'' x^{k+3}}{(k+2)(k+2)(k+3)}\right)_0^b -$$

$$- \left(\frac{y''' x^{k+4}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\right)_0^b + \cdots \tag{5}$$

cioè sostituendo:

$$S_k = k!\, b^{k+1} \left\{ \frac{\lambda}{k+1!} - \frac{\lambda_1 b}{k+2!} + \frac{\lambda_2 b^2}{k+3!} - \frac{\lambda_3 b^3}{k+4!} + \cdots \right\} . \tag{6}$$

Ora le λ_h sono quantità note, finite e determinate, e di più esse non tendono all'infinito col crescere di h. È chiaro dunque che la serie al secondo membro della (6) è certamente convergente qualunque sia il valore di b: dunque S_k deve riguardarsi come una quantità nota qualunque sia l'indice k.

In particolare per $k = 0$ abbiamo

$$S_0 = \int_0^b y \, dx = b \left\{ \lambda - \frac{\lambda_1 b}{2!} + \frac{\lambda_2 b^2}{3!} - \frac{\lambda_3 b^3}{4!} + \cdots \right\} . \tag{7}$$

Inutile aggiungere che S_0 rappresenta l'area racchiusa tra la curva integrale, l'asse delle x, l'asse delle y e la retta $x = b$; area che può quindi esattamente calcolarsi. Così $\frac{S_1}{S_0}$ dà l'ascissa del baricentro, la S_2 dà il momento d'inerzia rispetto all'asse delle y ecc.

5. Ciò posto, rappresentando, in via approssimata, l'integrale particolare y per mezzo del polinomio Y_n dato dalla (3), l'errore medio E_n che si commette nell'intervallo $b \geqq x \geqq 0$ è espresso, come è notissimo, dalla formola:

$$E_n^2 = \frac{1}{b}\int_0^b (Y_n - y)^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{b}\int_0^b \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n - y \}^2 \, dx . \tag{8}$$

Ora noi ci siamo proposti di scegliere le $n+1$ costanti $a_0\, a_1 \ldots a_n$ in modo che l'errore E_n risulti minimo. Poichè esse sono indipendenti tra di loro avremo le $n+1$ equazioni

$$(9) \qquad \frac{\partial E_n}{\partial a_0} = \frac{\partial E_n}{\partial a_1} = \frac{\partial E_n}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial E_n}{\partial a_n} = 0 .$$

Eseguendo le derivazioni le (9) divengono:

$$(10) \qquad \begin{cases} \int_0^b y\, dx = \int_0^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n)\, dx \\ \int_0^b yx\, dx = \int_0^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n)\, x\, dx \\ \int_0^b yx^2\, dx = \int_0^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n)\, x^2\, dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^b yx^n\, dx = \int_0^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n)\, x^n\, dx . \end{cases}$$

cioè effettuando i calcoli

$$(11) \qquad \begin{cases} S_0 = a_0 b + \dfrac{a_1 b^2}{2} + \dfrac{a_2 b^3}{3} + \cdots \dfrac{a_n b^{n+1}}{n+1} \\ S_1 = \dfrac{a_0 b^2}{2} + \dfrac{a_1 b^3}{3} + \dfrac{a_2 b^3}{4} + \cdots \dfrac{a_n b^{n+2}}{n+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_n = \dfrac{a_0 b^{n+1}}{n+1} + \dfrac{a_1 b^{n+2}}{n+2} + \dfrac{a_2 b^{n+3}}{n+3} + \cdots \dfrac{a_n b^{2n+1}}{2n+1} . \end{cases}$$

Ora le quantità $S_0\, S_1 \ldots S_n$ sono perfettamente note, come abbiamo già visto; anche la b è nota. Le (11) formano dunque un sistema di $n+1$ equazioni lineari algebriche tra le $n+1$ incognite $a_0\, a_1 \ldots a_n$. Il determinante dei coefficienti D_n è dato da:

$$D_n = \begin{vmatrix} b & \frac{b^2}{2} & \frac{b^3}{3} & \cdots & \frac{b^{n+1}}{n+1} \\ \frac{b^2}{2} & \frac{b^3}{3} & \frac{b^4}{4} & \cdots & \frac{b^{n+2}}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{b^{n+1}}{n+1} & \frac{b^{n+2}}{n+2} & \cdots & & \frac{b^{2n+1}}{2n+1} \end{vmatrix} = b^{(n+1)^2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix}$$

ed è quindi diverso da zero. Risolvendo allora il sistema (11) possiamo immediatamente conoscere $a_0\, a_1 \ldots a_n$; con che il problema, che ci siamo proposti, resta completamente risoluto.

6. Termineremo dimostrando che *l'errore medio* E_n *tende a zero col crescere di* n. Intanto è evidente che, se è $m > n$, si ha $E_m \leqq E_n$ giacchè Y_n può essere considerato come un particolare polinomio di ordine m in cui i primi $m - n$ coefficienti sono uguali allo zero. Poichè dunque E_n *è una funzione sempre positiva e decrescente* (o almeno non mai crescente) *di* n, è chiaro che *quando* n *tende all'infinito essa tenderà ad un limite positivo* ϱ. Avremo dunque

$$\lim_{n=\infty} E_n = \varrho \tag{12}$$

Resta ora a dimostrare che ϱ è uguale allo zero. Infatti per un n qualsiasi si ha $E_n \geqq \varrho$. Allora chiamando con μ_n il massimo valore che la quantità $|Y_n - y|$ assume nell'intervallo $b \geqq x \geqq 0$, dalla (8) risulta

$$\mu_n \geqq E_n \geqq \varrho . \tag{13}$$

Ma la y, secondo la nostra ipotesi, è una funzione continua. Dunque, per un teorema di Weierstrass (1), data una quantità ε piccola a piacere possiamo trovare un polinomio tale che l'errore massimo μ_n risulti minore di ε; perciò secondo la (3) dovrà essere $\varrho < \varepsilon$. Ma allora la quantità positiva ϱ, dovendo essere minore di ogni grandezza assegnabile ε, è certamente uguale allo zero. c. d. d.

Matematica. — *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto* (2). Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

È noto che i metodi del C. D. A. si basano sulla considerazione di una forma differenziale quadratica positiva

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s , \tag{1}$$

che si denomina *fondamentale*, in n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

I suoi coefficienti a_{rs}, i rispettivi elementi reciproci $a^{(rs)}$ e gli elementi differenziali sia di primo (simboli di Christoffel) che di secondo ordine (simboli di Riemann) intervengono nelle formole del C. D. A. In particolar

(1) Weierstrass, *Berliner Sitzungsberichte*, 1885. V. anche Borel, op. cit., pag. 51 e segg.

(2) Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* [Math. Annalen, B. LIV (1900), pp. 125-201].

modo intervengono i simboli di Christoffel di seconda specie $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\}$ nelle operazioni di derivazione covariante e di derivazione controvariante secondo la forma φ. Infatti, se $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ $(r_1, r_2, \dots, r_m = 1, 2, \dots, n)$ sono gli elementi di un sistema di funzioni (di $x_1, x_2, \dots, x_n$) covariante e di ordine m, il suo *sistema derivato* (*covariantemente*) *secondo la forma* φ ha per elementi [1]

$$(I) \qquad X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial X_{r_1 r_2 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_1^m l \sum_1^n q \left\{ \begin{matrix} r_l\, r_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\} X_{r_1 \dots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \dots r_m}.$$

Se invece $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ rappresentano gli elementi del sistema reciproco di $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, rispetto alla forma φ, e quindi costituenti un sistema controvariante dello stesso ordine [2], gli elementi del primo *sistema derivato* (*controvariantemente*) *secondo* φ sono [3]

$$(I_1) \qquad X^{(r_1 r_2 r_m \dots r_{m+1})} = \sum_1^n t\, a^{(t r_{m+1})} \left\{ \frac{\partial X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}}{\partial x_t} + \right.$$
$$\left. + \sum_1^m l \sum_1^n q \left\{ \begin{matrix} t\, q \\ r_l \end{matrix} \right\} X^{(r_1 \dots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \dots r_m)} \right.$$

Scopo della presente Nota è di introdurre un'unica operazione di derivazione, equivalente tanto alla derivazione covariante (I), quanto alla derivazione controvariante (I_1). Lo scopo si raggiunge se agli elementi covarianti o controvarianti che definiscono i sistemi dati si sostituiscono degli invarianti. Giova a tal uopo riferirsi ad una ennupla generica di congruenze ortogonali [4] $[1], [2], \dots, [n]$. Chiamando, come è consuetudine, con $1, 2, \dots, n$ le linee corrispondenti, sieno $\lambda_h^{(k)}$, $\lambda_{h/k}$ $(h, k = 1, 2, \dots, n)$ i sistemi coordinati controvariante e covariante della congruenza $[h]$. Posto

$$(2) \qquad J_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_1^n h_1 h_2 \dots h_m X_{h_1 h_2 \dots h_m} \lambda_{r_1}^{(h_1)} \lambda_{r_2}^{(h_2)} \dots \lambda_{r_m}^{(h_m)},$$

ovvero — ciò che è equivalente —

$$(2') \qquad J_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_1^n h_1 h_2 \dots h_m X^{(h_1 h_2 \dots h_m)} \lambda_{r_1/h_1} \lambda_{r_2/h_2} \dots \lambda_{r_m/h_m},$$

tanto le (I) quanto le (I_1) sono equivalenti alle seguenti:

$$(I') \qquad J_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \frac{dJ_{r_1 r_2 \dots r_m}}{ds_{r_{m+1}}} - \sum_1^m l \sum_1^n q\, \gamma_{r_l q r_{m+1}} J_{r_1 r_2 \dots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \dots r_m},$$

[1] Loc. cit., pag. 138, formola (19).
[2] Loc. cit., pag. 134.
[3] Loc. cit., pag. 140, formola (20).
[4] Loc. cit., Cap. II, § 1.

dove $ds_{r_{m+1}}$ è l'elemento d'arco delle linee della congruenza $[r_{m+1}]$ e

$$(3) \qquad \gamma_{r_l q r_{m+1}} = -\gamma_{q r_l r_{m+1}} = \sum_1^n {}_{hk} \lambda_q^{(h)} \lambda_{r_{m+1}}^{(k)} \lambda_{r_l/hk}$$

sono i *coefficienti di rotazione di Ricci* (1) ($\lambda_{r_l/hk}$ essendo gli elementi del primo sistema derivato covariantemente secondo φ dal sistema di elementi $\lambda_{r_l/h}$). Le (I') hanno il vantaggio, sulle originarie formole di derivazione (I) e (I_1), che gli elementi che in esse compariscono sono invarianti. Ciò giustifica la qualifica di *intrinseca* che attribuisco alla regola di derivazione contenuta nelle (I'). È degna di rilievo la circostanza che in questa derivazione i coefficienti di rotazione di Ricci hanno lo stesso ufficio dei simboli di Christoffel (di seconda specie) nella derivazione covariante: ciò scende in modo immediato dal confronto delle (I') colle (I).

Come conseguenza delle (I) si deducono le seguenti identità tra gli elementi $X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ del secondo sistema derivato da $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ (2):

$$(II) \qquad X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+2} r_{m+1}} - X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} r_{m+2}} = \\ = \sum_1^m l \sum_1^n pq \, a^{(pq)}_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p} X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m},$$

dove $a_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p}$ sono i simboli di Riemann di prima specie.

La derivazione intrinseca conduce invece alle seguenti identità equivalenti a quelle che precedono:

$$(II') \qquad J_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+2} r_{m+1}} - J_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} r_{m+2}} = \\ = \sum_1^m l \sum_1^n p \, \gamma_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p} J_{r_1 \dots r_{l-1} p r_{l+1} \dots r_m},$$

dove $\gamma_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p}$ sono gli invarianti di secondo ordine legati a quelli di primo ordine, definiti dalle (3), dalle relazioni

$$(4) \qquad \gamma_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p} = \frac{\partial \gamma_{r_{m+1} r_{m+2} r_l}}{\partial s_p} - \frac{\partial \gamma_{r_{m+1} r_{m+2} p}}{\partial s_{r_l}} + \\ + \sum_1^n j \{ \gamma_{r_{m+1} r_{m+2} j} (\gamma_{j r_l p} - \gamma_{j p r_l}) + \gamma_{j r_{m+1} p} \gamma_{j r_{m+2} r_l} - \gamma_{j r_{m+1} r_l} \gamma_{j r_{m+2} p} \},$$

e ai simboli di Riemann (di prima specie) dalle relazioni (3)

$$(5) \qquad \gamma_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p} = \sum_1^n {}_{qrst} a_{qr, st} \lambda_{r_{m+1}}^{(q)} \lambda_{r_{m+2}}^{(r)} \lambda_{r_l}^{(s)} \lambda_p^{(t)}.$$

(1) Loc. cit., pag. 148.

(2) Loc. cit., pag. 143, formola (23). Il prof. Levi Civita cortesemente mi fa rilevare che il primo membro delle (23) va cambiato di segno. Si tratta di un errore materiale sfuggito agli A. nella correzione delle bozze, e che non ha naturalmente conseguenza nel seguito.

(3) Loc. cit., pag. 157, formole (20) e (21).

1. Che le (I') sieno conseguenza delle (I) si può dimostrare nel modo seguente. Cambiati nelle (I) $r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}$ in $h_1 h_2 \dots h_m h_{m+1}$, si moltiplichino entrambi i membri per $\lambda^{(h_1)}_{r_1} \lambda^{(h_2)}_{r_2} \dots \lambda^{(h_m)}_{r_m} \lambda^{(h_{m+1})}_{r_{m+1}}$, indi si sommi rispetto agli indici $h_1 h_2 \dots h_m h_{m+1}$ da 1 fino a n; tenendo conto delle (2) si ottiene:

$$(6)\quad J_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \sum_1^n{}_{h_1 h_2 \dots h_m h_{m+1}} \frac{\partial X_{h_1 h_2 \dots h_m}}{\partial x_{h_{m+1}}} \lambda^{(h_1)}_{r_1} \lambda^{(h_2)}_{r_2} \dots \lambda^{(h_m)}_{r_m} \lambda^{(h_{m+1})}_{r_{m+1}} -$$

$$- \sum_1^m l \sum_1^n q \, h_1 h_2 \dots h_m h_{m+1} \left\{ \begin{matrix} h_l \, h_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\} X_{h_1 \dots h_{l-1} q h_{l+1} \dots h_m} \lambda^{(h_1)}_{r_1} \dots \lambda^{(h_m)}_{r_m} \lambda^{(h_{m+1})}_{r_{m+1}} .$$

Avendosi

$$\lambda^{(h_{m+1})}_{r_{m+1}} = \frac{dx_{h_{m+1}}}{ds_{r_{m+1}}} ,$$

e quindi

$$\sum_1^n{}_{h_{m+1}} \frac{\partial X_{h_1 h_2 \dots h_m}}{\partial x_{h_{m+1}}} \lambda^{(h_{m+1})}_{r_{m+1}} = \sum_1^n{}_{h_{m+1}} \frac{\partial X_{h_1 h_2 \dots h_m}}{\partial x_{h_{m+1}}} \frac{dx_{h_{m+1}}}{ds_{r_{m+1}}} = \frac{dX_{h_1 h_2 \dots h_m}}{ds_{r_{m+1}}} ,$$

la prima sommatoria del secondo membro della (6) si trasforma in

$$(7)\qquad \sum_1^n{}_{h_1 h_2 \dots h_m} \frac{dX_{h_1 h_2 \dots h_m}}{ds_{r_{m+1}}} \lambda^{(h_1)}_{r_1} \lambda^{(h_2)}_{r_2} \dots \lambda^{(h_m)}_{r_m} .$$

Dalla (2), moltiplicando per $\lambda_{k_1/h_1} \lambda_{k_2/h_2} \dots \lambda_{k_m/h_m}$, dopo aver cambiato gli indici $r_1 r_2 \dots r_m$ in $k_1 k_2 \dots k_m$, indi sommando rispetto a $k_1 k_2 \dots k_m$ si ottiene

$$X_{h_1 h_2 \dots h_m} = \sum_1^n{}_{k_1 k_2 \dots k_m} J_{k_1 k_2 \dots k_m} \lambda_{k_1/h_1} \lambda_{k_2/h_2} \dots \lambda_{k_m/h_m} ,$$

per cui

$$(8)\quad \frac{dX_{h_1 h_2 \dots h_m}}{ds_{r_{m+1}}} = \sum_1^n{}_{k_1 k_2 \dots k_m} \frac{dJ_{k_1 k_2 \dots k_m}}{ds_{r_{m+1}}} \lambda_{k_1/h_1} \lambda_{k_2/h_2} \dots \lambda_{k_m/h_m} +$$

$$+ \sum_1^n{}_{k_1 k_2 \dots k_m} J_{k_1 k_2 \dots k_m} \sum_1^m l \, \lambda_{k_1/h_1} \lambda_{k_2/h_2} \dots \lambda_{k_{l-1}/h_{l-1}} \lambda_{k_{l+1}/h_{l+1}} \dots \lambda_{k_m/h_m} \frac{d\lambda_{k_l/h_l}}{ds_{r_{m+1}}} .$$

Ma è

$$\frac{d\lambda_{k_l/h_l}}{ds_{r_{m+1}}} = \sum_1^n{}_q \frac{d\lambda_{k_l/h_l}}{dx_q} \lambda^{(q)}_{r_{m+1}} .$$

Tenendo conto di questa, delle condizioni di ortogonalità

$$(9)\qquad \sum_1^n{}_r \lambda^{(r)}_h \lambda_{k/r} = \varepsilon_{hk} = \begin{cases} 1 & h = k , \\ 0 & h \neq k , \end{cases}$$

e della (8), l'espressione (7) della prima sommatoria del secondo membro della (6) diviene

$$(7')\qquad \frac{dJ_{r_1 r_2 \dots r_m}}{ds_{r_{m+1}}} + \sum_1^m l \sum_1^n{}_{pqt} J_{r_1 \dots r_{l-1} p r_{l+1} \dots r_m} \lambda^{(t)}_{r_l} \lambda^{(q)}_{r_{m+1}} \frac{d\lambda_{p/t}}{dx_q} .$$

Ma per la (I) (per $m = 1$) si ha

$$\frac{d\lambda_{p/t}}{dx_q} = \lambda_{p/tq} + \sum_1^n{}_k \begin{Bmatrix} t\,q \\ k \end{Bmatrix} \lambda_{p/k},$$

d'altra parte dalla (3) si ricava

$$\lambda_{p/tq} = -\sum_1^n{}_{ij} \gamma_{ipj}\, \lambda_{i/t}\, \lambda_{j/q},$$

per cui la (7′) tenuto conto di (9) diviene ancora

$$(7'') \quad \frac{dJ_{r_1 r_2 \dots r_m}}{ds_{r_{m+1}}} - \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_p \gamma_{r_l p r_{m+1}} J_{r_1 r_2 \dots r_{l-1}\, p\, r_{l+1} \dots r_m} + \\ + \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{kpqt} \begin{Bmatrix} t\,q \\ k \end{Bmatrix} J_{r_1 \dots r_{l-1}\, p\, r_{l+1} \dots, r_m} \lambda_{p/k}\, \lambda^{(t)}_{r_l} \lambda^{(q)}_{r_{m+1}}.$$

Quest'ultima sommatoria, per le (2) e tenuto conto delle (9), facilmente si verifica che eguaglia l'ultima sommatoria del secondo membro delle (6); per cui portando nella prima sommatoria del secondo membro delle (6) la sua espressione equivalente (7″) si ottiene senz'altro (I′), c. v. d.

Con procedimento inverso da (I′) si ricava (I), pertanto (I′) è equivalente a (I).

Con criterio analogo partendo da (I_1) e tenendo conto delle (2′) si può constatare l'equivalenza di (I_1) e (I′).

In quanto alle identità (II′) esse possono dedursi sia direttamente applicando la regola di derivazione contenuta in (I′), sia con procedimento analogo a quello precedentemente sviluppato partendo dalle identità covarianti (II).

Matematica. — *Problemi dinamici a due variabili che ammettono un integrale razionale lineare e fratto rispetto alle componenti della velocità.* Nota del dott. E. DE CRISTOFARO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

1. Considerando il caso in cui nel moto di un punto in un piano esiste un integrale della forma:

$$\frac{A_1 x' + B_1 y' + D_1}{A_2 x' + B_2 y' + D_2} = h,$$

dove $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ sono funzioni finite determinate e ad un sol valore delle coordinate x, y del punto mobile; x', y' le componenti della velocità ed h una costante, il Bertrand (1), pervenne alla determinazione

(1) *Mémoire sur quelques-unes des formes les plus simples que puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel*, Journal de mathématiques, ser. 2ª, tomo 2 (1857).

dei coefficienti che risultano della forma

$$A_1 = a_{33} - a_{31}y \quad , \quad A_2 = a_{13} - a_{21}y$$
$$B_1 = a_{32} + a_{31}x \quad , \quad B_2 = a_{22} + a_{21}x$$

mentre D_1 e D_2 risultano determinate da due equazioni del tipo:

$$(1) \qquad \begin{cases} A_2 D_1 - A_1 D_2 = a_{13} - a_{11}y \\ B_2 D_1 - B_1 D_2 = a_{12} + a_{11}x \, , \end{cases}$$

in cui le a sono costanti.

Se poi poniamo: $A = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33}$, ed indichiamo con α_{ij} il complemento algebrico di a_{ij}, il determinante Δ del sistema (1) è:

$$\Delta = \alpha_{11} - \alpha_{12}x + \alpha_{13}y;$$

e le forze risultano determinate dalle due equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta^3 X = \alpha_{33} R + \alpha_{23} S = A(a_{12} + a_{11}x) \\ \Delta^3 Y = \alpha_{22} S + \alpha_{32} R = A(-a_{13} + a_{11}y) \end{cases}$$

in cui

$$R = \Delta D_1 = -\alpha_{21} + \alpha_{22}x - \alpha_{23}y$$
$$S = \Delta D_2 = \alpha_{31} - \alpha_{32}x + \alpha_{33}y \, .$$

2. Ora la ricerca del Bertrand può essere completata e si riesce a caratterizzare in modo assai semplice ed elegante i problemi in questione mercè un teorema enunciato dal Cerruti (1).

Anzitutto è facile provare, che il problema è uno dei notissimi. Consideriamo le rette

$$R = 0 \quad , \quad S = 0$$

il cui punto d'incontro M_0, supposto $a_{11} \neq 0$, ha le coordinate

$$x_0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad , \quad y_0 = \frac{a_{13}}{a_{11}} \, .$$

Sostituendo nelle (2) si ha

$$\Delta^3 X = a_{11} A\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{11} A(x - x_0)$$

$$\Delta^3 Y = a_{11} A\left(y - \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) = a_{11} A(y - y_0) \, ;$$

e però la forza, di componenti X, Y, è diretta verso il punto M_0.

Il problema è dunque uno dei notissimi in cui la forza è centrale.

(1) Questo teorema fu comunicato, senza dimostrazione, dal Cerruti al prof. Marcolongo molti anni or sono; di esso non pare siasi trovata notizia tra le carte lasciate dall'illustre scienziato.

Se fosse $a_{11} = 0$ le due rette $R = 0$, $S = 0$ risulterebbero parallele fra di loro e la forza sarebbe quindi parallela ad una direzione fissa.

Nell'ipotesi che sia $a_{11} \neq 0$, assumiamo la $S = 0$ come asse delle x ed il punto M_0 come origine delle coordinate. Risulta perciò

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 ;$$

e quindi posto

$$a_{22} \cdot a_{33} = \nu \quad , \quad a_{21} \cdot a_{33} = \lambda \quad , \quad a_{12} = \mu$$

risulta

$$A = a_{11} \cdot \nu \quad , \quad R = a_{11}(a_{33} x + a_{32} y) \quad , \quad S = a_{11} \cdot a_{22} y ,$$
$$\Delta = \nu + \lambda x + \mu y ,$$

mentre dalle (2) si ricava

$$(3) \qquad X = \frac{a_{11}^2 \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot x}{\Delta^3} = \frac{a_{11}^2 \nu x}{\Delta^3} \quad , \quad Y = \frac{a_{11}^2 \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot y}{\Delta^3} = \frac{a_{11}^2 \nu y}{\Delta^3} .$$

Facciamo ora una trasformazione omografica ponendo:

$$(4) \qquad \xi = \frac{x}{\Delta} \quad , \quad \eta = \frac{y}{\Delta} \quad , \quad k\, d\tau = \frac{dt}{\Delta^2} .$$

Si ha agevolmente:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = k(\Delta x' - x\Delta') = k[\nu x' - \mu(xy' - x'y)] \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = k(\Delta y' - y\Delta') = k[\nu y' + \lambda(xy' - x'y)] . \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per η, la seconda per ξ e sottraendo membro a membro, e osservando le (4), si ha

$$(6) \qquad \xi \frac{d\eta}{d\tau} - \eta \frac{d\xi}{d\tau} = k(xy' - x'y) .$$

Per la derivata seconda di ξ rispetto a τ si ha:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = k^2\Delta^2 \{\nu x'' - \mu(xy'' - x''y)\} ,$$

ma $xy'' - x''y = 0$ perchè il moto nel quale le variabili sono x ed y è centrale, quindi si hanno le equazioni

$$(7) \qquad \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = k^2\Delta^2 \nu x'' \quad , \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = k^2\Delta^2 \nu y'' .$$

Esse ci dànno facilmente, per le (3):

$$\xi \frac{d^2\eta}{d\tau^2} - \eta \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = 0$$

e però anche *il moto del problema trasformato è centrale.*

3. Dopo ciò è facile trovare le equazioni nel problema trasformato.

Infatti, le equazioni del moto primitivo sono (posta eguale ad 1 la massa):

$$X = x'' \quad , \quad Y = y''$$

cioè per le (3), (4)

$$x'' = \frac{a_{11}^2 \nu}{\Delta^2} \xi \quad , \quad y'' = \frac{a_{11}^2 \nu}{\Delta^2} \eta$$

onde, posto

$$\omega = a_{11} k \nu$$

le (7) assumono la forma

$$(8) \qquad \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \omega^2 \xi \quad , \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \omega^2 \eta \; ;$$

e queste *sono le equazioni notissime del moto di un punto respinto dall'origine in ragione diretta della distanza.*

4. Vediamo ora qual'è la forma dell'integrale algebrico razionale fratto del primo problema.

I valori dei coefficienti sono:

$$A_1 = a_{33} - a_{31} y \quad , \quad B_1 = a_{32} + a_{31} x \quad , \quad \Delta D_1 = a_{11}(a_{33} x + a_{32} y)$$
$$A_2 = a_{23} - a_{21} y \quad , \quad B_2 = a_{22} + a_{21} x \quad , \quad \Delta D_2 = a_{11}(a_{23} x + a_{22} y).$$

sicchè risulta

$$\frac{A_1 x' + B_1 y' + D_1}{A_2 x' + B_2 y' + D_2} = \frac{a_{33} x' + a_{32} y' + a_{31}(xy' - x'y) + \dfrac{a_{11}}{\Delta}(a_{33} x + a_{32} y)}{a_{23} x' + a_{22} y' + a_{21}(xy' - x'y) + \dfrac{a_{11}}{\Delta}(a_{23} x + a_{22} y)} = h$$

in cui, a denominatore, per maggiore simmetria si è ritenuto ancora a_{23} il che equivale a non fissare la posizione dell'asse y.

In tale caso è

$$a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} = a_{11} = \nu \quad , \quad a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31} = -a_{12} = \lambda \, ,$$
$$a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31} = a_{13} = \mu \; ;$$

e per le (4)

$$\frac{a_{11}}{\Delta}(a_{33} x + a_{32} y) = a_{11}(a_{33} \xi + a_{32} \eta) \; , \; \frac{a_{11}}{\Delta}(a_{23} x + a_{22} y) = a_{11}(a_{23} \xi + a_{22} \eta).$$

Indicando con ξ', η' le derivate prime di ξ, η rispetto a τ, dalle (5) e (6) si ricava:

$$k\alpha_{11}x' = \xi' + \alpha_{13}(\xi\eta' - \eta\xi') \quad , \quad k\alpha_{11}y' = \eta' + \alpha_{12}(\xi\eta' - \xi'\eta)$$

e conseguentemente

$$k\alpha_{11}[a_{23}x' + a_{32}y' + a_{31}(xy' - x'y)] = a_{33}\xi' + a_{32}\eta',$$

giacchè, per una nota proprietà dei determinanti, risulta

$$a_{33}\alpha_{13} + a_{32}\alpha_{12} + a_{31}\alpha_{11} = 0;$$

del pari

$$k\alpha_{11}[a_{23}x' + a_{22}y' + a_{21}(xy' - x'y)] = a_{23}\xi' + a_{22}\eta'.$$

Quindi la forma ultima dell'integrale nel problema trasformato è

$$\frac{a_{33}\xi' + a_{32}\eta' + \omega(a_{33}\xi + a_{32}\eta)}{a_{23}\xi' + a_{22}\eta' + \omega(a_{23}\xi + a_{22}\eta)} = h.$$

Ed è facile verificare che in virtù degli integrali delle (8)

$$(9) \qquad \xi = \beta \operatorname{Ch}\omega\tau + \gamma \operatorname{Sh}\omega\tau \quad , \quad \eta = \delta \operatorname{Ch}\omega\tau + \varepsilon \operatorname{Sh}\omega\tau$$

in cui $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sono costanti, si ha subito

$$\frac{a_{33}\xi' + a_{32}\eta' + \omega(a_{33}\xi + a_{32}\eta)}{a_{23}\xi' + a_{22}\eta' + \omega(a_{23}\xi + a_{22}\eta)} = \frac{a_{33}(\beta+\gamma) + a_{32}(\delta+\varepsilon)}{a_{23}(\beta+\gamma) + a_{22}(\delta+\varepsilon)} = \text{cost.}$$

5. Dalle relazioni

$$\Delta = \alpha_{11} - \alpha_{12}x + \alpha_{13}y \quad , \quad \xi = \frac{x}{\Delta} \quad , \quad \eta = \frac{y}{\Delta}$$

si ricava

$$\Delta = \frac{\alpha_{11}}{1 + \alpha_{12}\xi - \alpha_{13}\eta};$$

sostituendo in

$$k\,d\tau = \frac{dt}{\Delta^2}$$

e risolvendo rispetto a dt

$$dt = \frac{k\alpha_{11}^2\,d\tau}{(1 + \alpha_{12}\xi - \alpha_{13}\eta)^2}$$

da cui, con una quadratura, troviamo t espresso mediante τ.

Inoltre, poichè conosciamo gl'integrali del problema nel quale le variabili sono ξ, η potremo trovare tutti gli integrali del problema in cui le variabili sono x ed y. Resta dunque provato il seguente teorema del Cerruti:

Trasformando con le formole

$$\xi = \frac{x}{\Delta} \quad , \quad \eta = \frac{y}{\Delta} \quad , \quad dt = k\Delta^2 . dx$$

il problema del moto di un punto attratto da un centro fisso proporzionatamente alla distanza, si ottengono tutti quei problemi di meccanica che ammettono un integrale della forma

$$\frac{A_1 x' + B_1 y' + D_1}{A_2 x' + B_2 y' + D_2} = \text{cost.}$$

Il teorema però, non vale più nel caso di tre variabili, come sarà mostrato in un prossimo lavoro.

Matematica. — *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio.* Nota I di D. Montesano, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Uno degli argomenti più importanti trattati da Cremona nelle sue classiche ricerche su le corrispondenze birazionali dello spazio, riguarda le linee fondamentali di 2ª specie, le linee cioè basi dell'uno o dell'altro dei due sistemi omaloidici collegati alla corrispondenza che non sono segate fuori del gruppo dei punti fondamentali dalle linee basi variabili dei fasci del sistema.

Cremona, fondandosi sull'esame dei tipi particolari di corrispondenze sino allora noti, affermò che due linee fondamentali di 2ª specie omologhe godono la proprietà che la multiplicità di una delle due linee pel sistema omaloidico di cui è base, è eguale all'ordine dell'altra.

Tutti i geometri che dopo Cremona ebbero ad occuparsi in qualunque modo dell'argomento, ritennero vera ed enunciarono senza alcuna restrizione la proprietà indicata, non prendendo in esame la parte sostanziale della quistione che consiste nel ricercare le particolarità che acquista la rete di superficie omologa in uno dei due spazî ad una stella dei piani dell'altro spazio che ha il centro in un punto generico di una linea fondamentale di 2ª specie (1).

Ora il teorema indicato non regge in ogni caso, perchè in generale per due linee fondamentali di 2ª specie omologhe accade che *la multiplicità di una di esse per il sistema omaloidico di cui è base, è un multiplo del-*

(1) Veggasi fra gli altri Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, vol. IV, pag. 342.

l'ordine dell'altra, secondo un numero intero k che soltanto in casi particolari ha il valore 1.

In questa Nota ed in un'altra che le farà seguito, sono indicati tipi assai semplici di corrispondenze nelle quali il numero k ha valore arbitrario.

In successive pubblicazioni farò noti altri nuovi risultati ottenuti nelle mie lezioni sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio, teoria per la quale tuttora possono ripetersi le parole scritte 22 anni or sono dal Loria (1):

« Malgrado il grande valore degli scritti con cui l'Inghilterra, l'Italia « e la Germania contribuirono a fondare e svolgere la teoria delle corrispon- « denze univoche tra due spazî, non si può dire che questa abbia raggiunto « quel grado di perfezione che altre conseguirono e a cui essa poteva giu- « stamente aspirare; ciò forse dipende dal fatto che la soluzione delle più « ardue e delicate questioni ad essa collegate dipende dalla determinazione « della natura e dal numero delle singolarità delle superficie, determinazione « che offre delle difficoltà che non furono ancora vinte. Da ciò forse la spie- « gazione del fatto che i geometri posteriori a quelli citati si occuparono « più di illustrare i metodi dei grandi maestri summentovati che di perfe- « zionarli e completarli ».

1. Nello spazio data una omografia Ω, si assumano due fasci di quadriche corrispondenti Φ, Φ' che abbiano per basi l'uno una cubica o_3 ed una corda o di tale linea, l'altro la cubica o_3' e la corda o' omologhe delle predette linee nella Ω.

Quindi si assegni un sistema razionale Σ di proiettività intercedenti fra le punteggiate (o), (o') e si supponga che il sistema sia riferito proiettivamente ai fasci Φ, Φ'.

Il procedimento più semplice per ottenere tale sistema, è noto. Basta fissare nello spazio due schiere rigate incidenti ϱ, ϱ' e riferire proiettivamente la schiera ϱ alla punteggiata (o) e la schiera ϱ' alla punteggiata (o'). Con ciò ogni proiettività fra le punteggiate (o), (o') determina una proiettività fra le schiere ϱ, ϱ' e però individua un punto O dello spazio, vertice del cono inviluppato dai piani sostegni delle coppie di generatrici omologhe delle due schiere; e viceversa.

Perciò se si assegna nello spazio una curva razionale s fuori della quadrica sostegno delle due schiere e si riferiscono proiettivamente i punti O della curva s alle quadriche omologhe π_2, π_2' dei fasci Φ, Φ', le proiettività fra le (o), (o'), coordinate a questi punti O, costituiranno un sistema Σ soddisfacente alle condizioni indicate.

(1) Loria, *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, Torino, 1896, pag. 252.

Se la curva s è di ordine $k \geqq 1$, una retta p della schiera ϱ ed una retta p' della schiera ϱ' saranno in un piano che segherà la curva s in k punti. Corrispondentemente un punto generico P della o ed un punto generico P' della o' saranno omologhi in k corrispondenze del sistema Σ.

Inoltre la curva s sega la quadrica sostegno delle schiere ϱ, ϱ' in $2k$ punti. Corrispondentemente nel sistema Σ vi saranno $2k$ proiettività degeneri.

Ciò posto, si assumano nei fasci Φ, Φ' due quadriche omologhe arbitrarie π_2, π_2'. Le schiere α, α' delle due quadriche che contengono rispettivamente le o, o', corrispondendosi nella omografia Ω, risultano riferite fra di loro con proiettività nella quale risultano omologhe le o, o'. Così fra le schiere β, β' opposte alle precedenti resta determinata una proiettività nella quale due generatrici omologhe si appoggiano alle o, o' in punti corrispondenti nella proiettività del sistema Σ omologa delle quadriche π_2, π_2'.

E le due proiettività indicate che si hanno, l'una fra le α, α', l'altra fra le β, β', determinano una corrispondenza omografica fra i punti delle quadriche π_2, π_2'.

Col variare delle due quadriche nei fasci Φ, Φ', ne risulta una corrispondenza birazionale X fra i punti dello spazio S, sostegno del fascio Φ, e i punti dello spazio S', sostegno del fascio Φ'.

La genesi assai semplice di tale corrispondenza permette di stabilirne facilmente le proprietà caratteristiche.

2. Una qualsiasi delle $2k$ proiettività degeneri del sistema Σ abbia i punti singolari R, R' e sia omologa della coppia di quadriche ϱ_2, ϱ_2' dei fasci Φ, Φ'. Sulle due quadriche le schiere α, α' che contengono rispettivamente le o, o', si corrisponderanno nella X con proiettività ordinaria, mentre le schiere opposte β, β' si corrisponderanno nella X con proiettività degenere avente per raggi singolari i raggi r, r' delle due schiere che passano rispettivamente per i punti R, R'.

Perciò queste rette saranno linee fondamentali semplici della corrispondenza X negli spazî S, S' rispettivamente, e propriamente un punto generico A della r situato sulla generatrice a della schiera α avrà per omologa nella X la generatrice $a' \equiv o_3'^2 r'$ della schiera α', omologa della a nella omografia Ω. Ed analogamente per la r'.

Dunque la corrispondenza X presenta $2k$ rette fondamentali semplici in ciascuno dei due spazî. Ogni retta fondamentale semplice $r_i \equiv o^1 o_3^1$ dello spazio S si associa ad una retta fondamentale semplice $r_i' \equiv o'^1 o_3'^1$ dello spazio S' in modo che le superficie fondamentali omologhe delle due rette negli spazî S', S sono rispettivamente le $\varrho_2' \equiv o' o_3' r_i'$, $\varrho_2 \equiv o\, o_3\, r_i$.

Per ogni altra coppia $\pi_2\, \pi_2'$ di superficie omologhe dei fasci Φ, Φ', si ha sempre che la corrispondenza subordinata alla X che intercede fra i punti delle due superficie, non è degenere. In tale corrispondenza alla retta o corrisponde sempre la retta o', ma la proiettività che intercede fra i punti

delle due rette, varia col variare della coppia π_2 , π_2'. Perciò le o , o' non sono linee non fondamentali omologhe, ma sono linee fondamentali di 2ª specie fra loro omologhe.

Così nella corrispondenza che si ha fra le π_2 , π_2', alle cubiche basi o_3 , o_3' corrispondono rispettivamente due cubiche v_3', v_3 le quali variano col variare della coppia $\pi_2 \pi_2'$; e però le o_3 , o_3' sono linee fondamentali di 1ª specie della X negli spazî S , S'.

Nè la corrispondenza X presenta altre linee fondamentali oltre quelle indicate.

Nella corrispondenza subordinata alla X che intercede fra le quadriche omologhe π_2 , π_2' dei fasci Φ , Φ', ad una conica generica c_2 della prima superficie corrisponde una conica c_2' dell'altra.

Tenendo fisso il piano ψ della c_2 e facendo variare la coppia $\pi_2 \pi_2'$, la c_2' varia sulla superficie ψ', omologa nella X del piano ψ, descrivendo su di essa un fascio F' proiettivo al fascio F descritto dalla c_2 sul piano ψ.

E come la c_2 in ogni sua posizione si appoggia alla o soltanto nel punto $O \equiv o\psi$, così la c_2' in ogni sua posizione si appoggia alla o' in un solo punto. Inoltre fissato sulla retta o' un punto generico O', vi sono k coppie di quadriche omologhe $\pi_2 \pi_2'$, sulle quali risultano omologhi i punti O , O', e però esistono sulla ψ' k coniche del fascio F' che passano pel punto O'.

Ne segue che i piani delle coniche c_2' costituiscono un inviluppo razionale di classe k riferito proiettivamente al fascio di quadriche Φ'. La superficie generata dalle due forme proiettive è la ψ': questa perciò risulta essere una superficie $\psi'_{2k+1} \equiv o'^k o_3'^k r'_{(i)}$, per $i = 1 , 2 , \ldots 2k$.

Quel che si è detto per le superficie omologhe dei piani dello spazio S, può ripetersi analogamente per le superficie omologhe dei piani dello spazio S'; e si conclude che *la corrispondenza* X *presenta le rette fondamentali di 2ª specie* o , o' *fra loro omologhe, multiple di ordine* k, sicchè per $k > 1$ non si verifica per la corrispondenza la proprietà enunciata da Cremona.

La superficie σ' dello spazio S' omologa della cubica fondamentale o_3, assieme con una quadrica π_2' del fascio Φ' forma la superficie completa di ordine $2(2k + 1)$ omologa nella X di una quadrica π_2 del fascio Φ.

Perciò la σ' è di ordine $4k$.

Una corda della cubica o_3', essendo omologa nella X di una corda della cubica o_3, sega la σ' in *due* punti fuori della o_3': questa perciò è multipla per la σ' di ordine $\dfrac{4k-2}{2} = 2k - 1$.

Così una retta appoggiata alle o' , o_3', essendo omologa nella X di una retta appoggiata alle o , o_3, sega la σ' in *un* punto fuori delle o' , o_3': perciò la o_3' è multipla per la σ' di ordine $2k$.

Quel che si è detto per la superficie dello spazio S' omologa della o_3, può ripetersi per la superficie dello spazio S omologa della o_3'.

Ne segue che nello spazio S′ le linee omologhe delle rette dello spazio S sono curve $c'_{2k+1} \equiv o_3'^{4k}\, r'^{2}_{(i)}$; le curve omologhe dei punti della cubica o_3 sono curve $c'_k \equiv o_3'^{2k-1}\, r'^{1}_{(i)}$ della superficie σ', e le curve omologhe delle rette dello spazio S appoggiate alla o sono curve $c'_{k+1} \equiv o'^{2k}\, o'^{1}\, r'^{1}_{(i)}$.

Ed analogamente per lo spazio S′ (1).

Con ciò la corrispondenza X risulta perfettamente determinata.

Matematica. — *Quelques propriétés des fonctions de Bessel.* Nota II di Joseph Pèrès, presentata dal Socio V. Volterra.

4. J'ai montré dans ma Thèse (2) que toute fonction analytique de t est développable en une série procédant suivant les puissances de compositions d'une fonction telle que Ψ. Comme une telle fonction peut toujours se mettre sous la forme

$$a_0\, J_0(t) + \overset{*}{J}_0\, \overset{*}{H}(t)\,,$$

$H(t)$ étant déterminée par une équation de Volterra, il en résulte qu'elle admet un développement convergent

$$a_0\, J_0(t) + a_1\, J_1(t) + \cdots + a_n\, J_n(t) + \cdots .$$

J'ai déja énoncé ce résultat et indiqué qu'on peut le rattacher au fait suivant: il existe une fonction

$$k(t,\tau) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{t-\tau}}\; J_1\left(\sqrt{t(t-\tau)}\right) = \sum_1^{\infty} {}_k \frac{(-1)^k}{2^{2k}\, k!}\, \frac{(t-\tau)^{k-1}\, t^k}{(k-1)!}$$

telle que

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n\, n!} + \int_0^t k(t,\tau)\, \frac{\tau^n}{2^n\, n!}\, d\tau \quad (3). \tag{16}$$

(1) Il tipo più generale di corrispondenza biunivoca spaziale che alle quadriche di un fascio Φ fa corrispondere le quadriche di un fascio Φ' determinando fra due quadriche omologhe una corrispondenza omografica, fu ottenuto da Noether, *Ueber die eindeutige Raumtransformationen*, Math. Annalen, vol. III, § 6, pag. 570.

Il caso in cui la corrispondenza presenta il carattere involutorio, fu ottenuto nella mia Nota: *Su una classe di trasformazioni razionali ed involutorie dello spazio* ..... Giornale di Matematica, vol. XXXI.

Anche per la corrispondenza X_{2k+1} ottenuta in questa Nota, con opportune particolarità nella costruzione indicata, si può fare in modo che essa presenti il carattere involutorio.

(2) Paris 1915. Chap. IV.

(3) Voir deux Notes des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris 1918). La formule (16) est valable en remplaçant $n!$ par $\Gamma(n+1)$ et en prenant, si c'est nécessaire, la partie finie de l'intégrale, quel que soit n.

5. Voici d'autres conséquences de la formule (16); en posant

$$\varphi_n(t) = t^{-\nu} J_{n+\nu}(t)\, 2^{n+\nu}\, \Gamma(n+\nu+1)$$

on a

$$\varphi_n(t) = t^n + \int_0^t L(t,\tau)\, \tau^n\, d\tau \tag{17}$$

avec

$$L(t,\tau) = k(t,\tau)\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\nu}.$$

On en déduit que les développements

$$a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \cdots + a_n\varphi_n(t) + \cdots \tag{18}$$

ont, si $\nu > -1$, les mêmes propriétés que les développements

$$a_0 J_0(t) + a_1 J_1(t) + \cdots + a_n J_n(t) + \cdots \tag{19}$$

La méthode de démonstration est exactement la même (1): si $f(t)$ est analytique dans le cercle $|t| < R$ on en déduit, par la transformation

$$f(t) = \varphi(t) + \int_0^t L(t,\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau \tag{20}$$

une fonction $\varphi(\tau)$ analytique dans le même cercle. Donc $\varphi(t)$ a le développement convergeant

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots; \tag{21}$$

d'où par la transformation (20)

$$f(t) = a_0\left\{1 + \int_0^t L(t,\tau)\, d\tau\right\} + \tag{22}$$

$$+ a_1\left\{t + \int_0^t L(t,\tau)\, \tau\, d\tau\right\} + \cdots = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \cdots + a_n\varphi_n(t) + \cdots$$

convergeant pour $|t| < R$. Comme d'après (17) on a

$$\varphi_n(t) = t^n(1+\varepsilon)$$

ε tendant vers zéro pour n très grand, la série (22) diverge partout à l'extérieur du cercle de convergence de (21).

Si au contraire $f(t)$ est simplement continue, il en est de même de $\varphi(t)$. On peut alors développer $\varphi(t)$ en série uniformément convergente de

(1) Loc. cit. Note précèdente.

polynomes en t; $f(t)$ admettra donc, par application de la transformation (20) le développement uniformément convergent

$$(23) \qquad f(t) = \Sigma_n \left(a_0^{(n)} \varphi_0(t) + a_1^{(n)} \varphi_1(t) + \cdots + a_{p_n}^{(n)} \varphi_{p_n}(t)\right).$$

En résumé une fonction $f(t)$ est)

1° *si elle est analytique pour* $|t| < R$, *développable en une série* (22);

2° *si elle est continue, développable en une série* (23).

Le premier de ces résultats est classique. Nous l'avons demontré très simplement et complété.

Fisica. — *Dimostrazione sperimentale della costanza di velocità della luce emessa da una sorgente mobile.* Nota di Quirino Majorana, presentata dal Socio C. Somigliana.

In due Note precedenti (1), dopo aver premesso alcune considerazioni sul secondo postulato della teoria della relatività, descrissi una mia disposizione sperimentale, con cui potei dimostrare che la luce si propaga con velocità costante, indipendentemente dalle condizioni di moto o di quiete di uno specchio su cui essa si riflette.

In fine della seconda Nota, accennavo al mio proposito di studiare sperimentalmente la eventuale influenza del moto della sorgente sulla velocità di propagazione della luce; è ora oggetto di questa Nota, di riferire su tale ricerca.

Come è noto, le sole osservazioni fatte con sorgenti luminose mobili sono quelle astronomiche, e le altre con i raggi canali. In ispecie, dalle prime si è potuto dedurre la misura dell'effetto Doppler (e quindi il valore della velocità di spostamento) per le singole sorgenti, come le stelle fisse, i pianeti, od i bordi del sole. Non mi consta che sia stato prima d'ora mai tentato di dimostrare l'effetto Doppler con il movimento artificiale di una comune sorgente luminosa; la difficoltà di questa ricerca risiede principalmente nel dover dotare la sorgente di una notevole velocità di spostamento.

Ma supposto di poter realizzare una disposizione del genere, il suo interesse non riguarda tanto la verifica dell'effetto Doppler propriamente detto (cambiamento di frequenza), su cui nessun dubbio può ormai esistere; quanto il controllo del valore della velocità di propagazione della luce,

(1) Vedi questi Rendiconti, XXVI, pp. 118 e 155, 1917. Sullo stesso argomento, vedi anche i lavori di Michelson, Astrophisical Journal, XXXVII. pag. 190, 1913, e di Fabry e Buisson, C. R., 158, pag. 1498, 1914; questi lavori, di cui solo recentemente ho avuto conoscenza, conducono, con metodi diversi, a risultati concordanti con quello indicato da me nella seconda delle suddette Note.

anche nel caso della sorgente mobile. Per cui, l'esame di questa non va fatta con prismi, analogamente alla disposizione Belopolski, nè con reticoli, per le ragioni da me precedentemente esposte. Accingendomi dunque alla realizzazione di un apparecchio con sorgente luminosa mobile, decisi, sin dal principio, di esaminare questa con la disposizione interferenziale già da me descritta, e fondata sull'uso dell' interferometro di Michelson, con grande differenza di cammino.

Se si ammette il secondo postulato della teoria della relatività, o se, comunque, la velocità di propagazione della luce per sorgenti terrestri, ci appaia immutevole, e supposto realizzato un apparecchio del genere, si vedrebbero passare sul filo del reticolo, quando la sorgente passa dalla quiete alla velocità v (contata lungo il raggio di propagazione) un numero di frangie:

$$f = \frac{l v}{\lambda c};$$

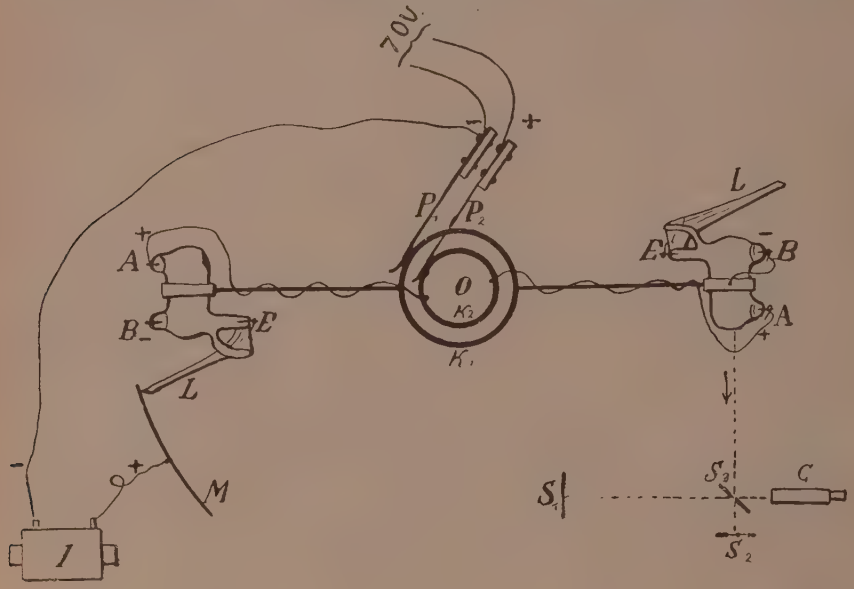
dove l è la differenza di cammino dei raggi interferenti, λ la lunghezza d'onda, e c la velocità della luce. Ciò è analogo a quanto già dissi per il caso degli specchi in moto. Ora i valori che è lecito sperare raggiungere in laboratorio per v, sono assai modesti, anche rispetto a quelli delle sorgenti luminose astronomiche; occorre quindi dare ad l il maggior valore possibile, il che può solo farsi adoperando una sorgente luminosa a *curva di visibilità* molto lunga. Questa non può essere che la riga verde del mercurio, che, quantunque più complessa nella sua struttura delle righe del cadmio, permette di osservare le frangie sino valori di $l = 32$ cm. (1), adoperando eccitazione dei vapori mediante arco voltaico nel vuoto. Inoltre questa sorgente, per la sua eccezionale intensità è particolarmente adatta per le attuali ricerche. Ritengo quindi che queste difficilmente potrebbero ripetersi adoperando una sorgente diversa.

Stabilii dunque il nuovo piano di esperienze, proponendomi di porre in rapida rotazione degli archi a mercurio contenuti in tubi di vetro vuoti di aria, e di esaminare la luce da essi emessa, tangenzialmente alla traiettoria, mediante l' interferometro di Michelson. Ora, volendo raggiungere una velocità periferica di circa 100 metri al secondo, come quella necessaria per un sicuro apprezzamento di uno spostamento nelle frangie, si incontrano, dal punto di vista meccanico, due difficoltà principali; la enorme forza centrifuga, e la grande resistenza dell'aria. Ad attenuare la prima vi ha convenienza di ingrandire, per quanto possibile, il diametro della traiettoria, e diminuire il numero dei giri a secondo. Si sa infatti che la forza centri-

(1) Va notato che Michelson osservava le frangie anche sino a $l = 40$ cm. Ma quel fisico adoperava tubi di Geissler a vapori di mercurio; sembra che la eccitazione con arco voltaico nel vuoto da me usata, cambi la curva di visibilità.

fuga cresce come il quadrato di quel numero. e la velocità di spostamento come la prima potenza.

Dopo varii tentativi fissai il detto diamatro a 2 metri; poichè i piccoli tubi con mercurio da me costruiti, pesano ciascuno 35 grammi, la forza centrifuga che li cimenta ad una velocità di soli 14 giri a 1^s (corrispondente a circa 90 m. di velocità periferica) risulta di 30 Kg. Si è così al limite quasi del carico di sicurezza al quale il materiale vetro può essere sollecitato; nelle esperienze che ho eseguito i tubi si rompevano quindi ancora



frequentemente pur consentendo, in media, sufficienti intervalli di tempo per le osservazioni e le misure.

Quanto alla resistenza dell'aria, questa venne ridotta al minimo, adoperando sottili fili di acciaio ad alta resistenza meccanica, come connessioni dei tubi con l'albero rotante. Ciò malgrado nelle condizioni di velocità citata, essendo l'apparecchio fornito di solo due tubi in posizione diametrale, occorreva una potenza di circa 5 kw. Passo ora senz'altro ad una sommaria descrizione di esso. La figura ne indica schematicamente i particolari, rappresentandoli per chiarezza, con scala non uniforme. O è l'albero rotante connesso con puleggia e cinghia ad un motore di velocità e senso di rotazione regolabili e di potenza massima di 10 HP. Due tubi a vuoto di forma speciale (dimensione massima 4 cm.) portano ciascuno tre elettrodi A, B, E, e sono connessi, mediante robusti fili di acciaio, con l'albero O. Questo è circondato da due anelli collettori K_1, K_2 comunicanti con gli elettrodi

A e B. Due spazzole P_1, P_2, adducono all'apparecchio corrente continua a 70 v. Una certa quantità di mercurio è contenuta in ciascun tubo (28 gr.), ed essa, quando l'apparecchio è in rotazione, viene a distribuirsi su A e B. Gli elettrodi E fanno capo a lamine leggere di alluminio L che, al girar dei tubi, passano in vicinanza di un arco metallico M, avente per centro O. Un rocchetto di induzione I, con i suoi reofori connessi come in figura, posto in azione per brevi istanti, dà scariche, che eccitano, al loro passaggio presso M, i tubi. La corrente in questi, è regolabile, con opportune resistenze, fra 2 e 3 ampere. Debbo per altro osservare che è spesso inutile, dopo aver avviata la rotazione, servirsi del rocchetto I. Benchè infatti la quantità di mercurio contenuta in ciascun tubo sia assolutamente insufficiente a stabilire connessione metallica continua fra A e B, l'adescamento avviene frequentemente spontaneo, in causa di ionizzazione del gas residuo, dovuta a scosse meccaniche della rotazione. Oltre che da K_1 e K_2, l'albero O è circondato da una serie di blocchetti (non segnati in figura) su cui striscia una terza spazzola. Questo congegno, a mò di sirena elettrica, permette, mediante opportuna connessione con una pila e un telefono, di ascoltare un suono, dal quale si può dedurre il valore della velocità di rotazione.

La luce emessa dai tubi è massima, per ragioni costruttive, in direzione tangenziale al moto; l'interferometro di Michelson è disposto quindi come in figura, e su esso la luce arriva parallela, in virtù di lenti non segnate, sullo specchio S_2. Col cannocchiale C si può raccogliere una sensazione luminosa, sufficientemente intensa, malgrado la sua discontinuità (20 o 30 sprazzi a 1″).

Grazie alla buona intensità di luce, posso, a differenza delle già descritte esperienze con gli specchi, adoprare un valore di $l = 232\ ^{m}/_{m}$, per il quale ho osservato un massimo di visibilità delle frangie. In queste condizioni, e animando l'apparecchio di una velocità da 10 a 14 giri a 1^{s}, si scorge facilmente uno spostamento delle frangie, quando la velocità *passa da un verso all'opposto*. Questo spostamento, rilevato con un micrometro oculare, ha precisamente il senso voluto dal principio della costanza delle velocità di propagazione della luce. Prevediamone il valore in base a ciò. Per una serie numerosa di osservazioni, si ha come media: $v = 79{,}77\ ^{m}/_{sec}$; $l = 232\ ^{m}/_{m}$; $\lambda = 0{,}546\ \mu$; per cui si prevede uno spostamento:

$$f = \frac{232 \cdot 79{,}77}{546 \cdot 3}\, 10^{-3} = 0{,}113, \quad \text{e} \quad 2f = 0{,}226.$$

Sperimentalmente, ho potuto, in queste ricerche, aumentare notevolmente la precisione nella osservazione delle frangie: ciò principalmente grazie alla maggiore luminosità del fenomeno. Le frangie circolari si succedono, come

è noto, con diametri crescenti secondo la legge:

$$n = \frac{l}{\lambda}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right),$$

in cui l e λ hanno il solito significato, n è il numero d'ordine crescente delle frangie a partire dal centro, ed α il loro raggio misurato in angolo visuale dall'occhio dell'osservatore. Per cui, quando si osserva uno spostamento di una frangia, per ottenere una maggior precisione, devesi tener conto di quella legge parabolica, nel riferirlo al valore della lunghezza d'onda. Questo è ciò che ho fatto, studiando preventivamente la distribuzione delle dette frangie, nel campo del cannocchiale. La brevità dello spazio non mi consente peraltro di spiegare più diffusamente ciò; dirò soltanto che, nel caso della serie di osservazioni citata, ottengo, come media, uno spostamento $2f = 0{,}238$.

Come si vede questo valore è alquanto superiore al previsto, di circa il 5 %. Sinora, per quanto io abbia messo la massima cura nel rendermi conto della precisione delle diverse misure necessarie per arrivare a questo risultato, non so se qualche errore sistematico giustifichi questo scarto; sicuramente esso appare superiore all'errore probabile del risultato, ed è perciò che ne ho fatto parola. Ma trattandosi di misure assai delicate, mi riservo di controllare ancora il valore dello spostamento delle frangie prima di ammettere definitivamente la discordanza (per quanto lieve) suddetta. Per ora si può concludere che, nelle condizioni dell'esperimento, e dentro i limiti di precisione delle fatte osservazioni, *la velocità della luce non muta per il movimento della sorgente, lungo la direzione della propagazione.*

Dalle ricerche eseguite da Michelson, Fabry e Buisson, e da me, risulta dunque che la velocità della luce non è influenzata dalla riflessione su specchi o superficie riflettenti; da quelle ora da me descritte, risulta ancora che la detta velocità non muta per il movimento della sorgente. Questi fatti sono certamente d'accordo con la teoria della relatività; ma effettivamente, malgrado il loro evidente interesse, non possono, con pieno rigore logico, essere citati come sicura prova sperimentale di quella teoria. Non bisogna dimenticare infatti, fra le altre, due circostanze dell'esperimento: e cioè la presenza di materia ponderabile, che è traversata dai raggi interferenti (aria, vetro, metallo); e quella del campo gravitazionale della nostra terra. Mentre è possibile immaginare ancora esperienze che prescindano dalla prima, non è prevedibile se ulteriori risultati sperimentali, possano mettere in evidenza la eventuale influenza della seconda.

Geologia. — *Influenze morfologiche dei movimenti postumi sull'area dell' Italia.* Nota I di G. Rovereto, presentata dal Corrispondente Arturo Issel.

Se per studiare la struttura dell'Appennino occorre usare, o almeno aver sempre presente, il moderno concetto dei grandi sovrapponimenti; così, per stabilire l'origine delle attuali condizioni morfologiche dello stesso, sono necessarie delle considerazioni inspirate dalle eziandio moderne constatazioni della orogenesi attenuata, della epeirogenesi e di altri molti *movimenti postumi*, ossia posteriori al periodo orogenetico propriamente detto.

In una Nota precedente, si è accennato al fatto che un grande inarcamento postoligocenico è stato la prima origine dell'Appennino Ligure. Fra le condizioni tettoniche che tale curva, conseguenza di una orogenesi attenuata, ha determinate, sta quella della ben nota fascia monoclinale di terreni neogenici, a inclinazione piuttosto risentita, e in rapido aumento venendo dall'esterno verso l'interno della catena, che si distende lungo il piede di questa, dove dalla montagna si passa alle colline circumpadane e circumadriatiche.

Se stabiliamo un livello medio, rispetto a quello basale dell'erosione, al di sopra del quale stiano le azioni denudatrici, al di sotto quelle di colmata, si dirime, in certo qual modo, l'*area di affondamento*, corrispondente alla depressione padana, da quella del sollevamento appenninico. Per di più, questo *livello dirimente* corrisponde alla parte più esterna della fascia monoclinale; e se riferiamo questa al restante della piega di sollevamento, per la cui ampiezza gli strati attenuano di molto la loro inclinazione, e di conseguenza rappresentano una regione mediana, a regime tettonico differente, la possiamo distinguere come *zona di nascimento*, la quale è presente sempre, e con gli stessi caratteri, ai lati dei movimenti epeirogenetici, o di grande e semplice incurvatura orogenica.

Il movimento orogenetico post-oligocenico diventò in sèguito un ripetuto gonfiarsi e sgonfiarsi epeirogenetico, tipico, che cominciò col determinare, per spazî interrotti, le varie ingressioni mioceniche, e terminò col produrre un addentramento del mare nelle valli della costa ligure, dopo che questa aveva subìto il terrazzamento conseguente dalla discesa eustatica post-tirrenense (1); per modo da poter ora osservare due forme di contraria origine

(1) Secondo il mio modo di vedere, il piano *tirrenense*, opportunamente proposto dall'Issel (in questi Rendiconti, vol. XXIII, 1914), corrisponde alla 3ª infraglaciale, e comprende le industrie umane strepiensi, chelleensi, acheulensi e le prime mousteriensi: è caratterizzato dalla fauna a *Strombus bubonius*, che si trova d'ordinario fra i 15 e i 35 m. di altitudine; vi si possono però riferire i terrazzi fra i 15 e i 55 m. Con ciò considero sue parti il *milazziense* e il *monasteriense* del Depéret.

associarsi e alternarsi: ossia, i terrazzi si protendono fra insenature, la cui parte più interna è colmata da sedimenti alluvionali recentissimi, scendenti sino a parecchie diecine di metri sotto il livello del mare attuale, e accumulati di contro alle sabbie marine: fra questi colmamenti, il meglio noto è quello della pianura del Bisagno.

Fra questi due avvenimenti estremi, se ne interposero parecchi altri. I principali furono: l'accentuazione dell'area di affondamento tirrenica — fenomeno ben diverso dai creduti sprofondamenti verticali —, di cui sono tuttora vestigia le valli sottomarine, e il sollevamento epeirogenetico delle Alpi Marittime.

È opinione dell'Issel (1), che tale sommersione di una larga zona vallonata, costiera, sia avvenuta sul finire del miocene superiore: e questa opinione noi la condividiamo, sopratutto per le considerazioni che seguono.

I primi sedimenti pliocenici si depositarono al piede dell'Appennino Ligure, verso il Tirreno, su di una costa la cui *linea di riva* era pressochè coincidente con l'attuale; solo per eccezione, in alcuni seni, si presentava più addentrata di qualche chilometro. Inoltre, era una costa profondissima e disarticolata; e questo si deduce dalla potente massa di marne che si sono depositate contro le sue falesie, riuscendo ridottissime le formazioni di spiaggia, e dalla presenza di canali costieri, che le marne hanno riempiuto, e che delle isole rocciose limitavano dalla parte dell'alto mare. Di tale apparato costiero se ne ha esempio a San Martino d'Albaro, a Genova, a Borzoli, ad Arenzano, a Cogoleto, a Savona e così via. Da ciò la necessità di ammettere, che, al principiar del pliocene, si fosse di già verificata una rapida sommersione littoranea; ammissione ben concordabile col fatto, che il terreno di immediata antecedenza, il miocene superiore, non affiora in nessun tratto della costa ligure; che anzi, è sommamente suggestivo di cominciar a trovarlo in Val di Magra, dove le antistanti profondità marine cessano di essere vallonate.

Il quantitativo di questo affondamento prepliocenico venne in sèguito aumentato dai movimenti che, per l'area continentale, costituirono, invece, il sollevamento postpliocenico. Difatti, osserviamo oggigiorno i sedimenti pliocenici inclinati di una diecina di gradi a mare, mentre, dall'altro lato della catena appenninica, si ha un'inclinazione eguale, ma pendente in senso opposto, verso la pianura; se ne deduce la prova, che un movimento epeirogenetico ha sollevato l'area montuosa, e abbassato nel contempo le depressioni laterali. Quindi, un buon numero di metri di affondamento tirrenico si aggiunsero, per simile fenomeno, alle profondità già conseguite sul finire del miocene; e nuovi tronchi di incisione pliocenica si sommersero, e si uni-

(1) C. R. des Séances de l'Acad. des Sciences, 31 janv. 1887; Boll. Soc. Geogr. Ital., fasc. IX, 1911.

rono agli esistenti, riannodandoli alla costa, alla quale forse più non giungevano a causa del colmamento littoraneo.

I successivi movimenti eustatici del quaternario ci provano due fatti: che la linea costiera continuò ad esser all'incirca quella del mare pliocenico; poichè i terrazzi quaternari, dai più antichi ai più recenti, sono incisi nei sedimenti pliocenici, se questi si son conservati, o sulla loro dirittura; onde ciò esclude senz'altro l'esistenza di una terra quaternaria, più protesa dell'attuale (1); che le profondità del vallonamento sottomarino odierno erano al principio del quaternario maggiori di almeno quanto il fenomeno eustatico rappresenta di abbassamento; onde, dove ora si ha la batometrica dei 1500 m., doveva esservi, durante il calabrense, quella almeno dei 1800 m., e così via.

L'ultimissimo abbassamento continentale — fino a prova contraria non lo crediamo eustatico — cui si è accennato, ebbe lo stesso ufficio dell'affondamento pospliocenico; ricongiunse alla zona costiera le valli sommerse, che il riempimento littoraneo aveva, come è ben presumibile, obliterate per tutta la zona di mare basso. Per questo, la valle sottomarina attuale è il frutto di ripetuti abbassamenti, conseguenti della zona di affondamento di cui fa parte, e che più volte l'hanno ricondotta verso la costa: si arresta ora, difatti, fra i 50 e 100 m. di profondità, e le succede, verso la spiaggia, una scarpa unita, che in alcuni casi, ad esempio alla foce della Polcevera, nella immediata vicinanza della terra emersa, ritorna a essere assolcata, probabilmente per il modo con cui ivi avviene la sedimentazione delle torbide.

Si è accennato al sollevamento epeirogenetico delle Alpi Marittime: esso si è manifestato in un senso affatto trasversale a quello dell'Appennino, poichè, come è noto, i lembi pliocenici, che cominciano ad affiorare a levante di Genova, nei pressi di Sturla, a mano a mano che si avvicinano alle Alpi, crescono in altitudine; onde i valori massimi di questa, m. 515 (2), si hanno, per quanto riguarda il territorio italiano, nei dintorni di Ventimiglia. E se si considera che tale aumento è distribuito su di una lunghezza di circa 160 Km., ciò vale a indicare quanto il rigonfiamento epeirogenetico sia stato ampio, nello stesso tempo che lieve.

(1) I terrazzi quaternari della Liguria — fossiliferi solo nel Nizzardo, ma ben tipici in più punti, in Genova stessa, fra Sampierdarena e Voltri, fra Cogoleto e Varazze, attorno ai seni di Vado e di Albenga — hanno quelle stesse altitudini che si ripetono ovunque sulle coste del Mediterraneo; ed è profondamente erronea la successione cronologica dei livelli di base distinta in Liguria dal Sawicki, avendo questi riferito al pliocene superiore il terrazzo tirrenense, al pliocene medio quello del siciliense, al pliocene inferiore quello del calabrense; e avendo per di più creduto di poter distinguere un livello di base miocenico, del quale in realtà non conosciamo la linea di riva, e un altro oligocenico, di un periodo sul finire del quale non esisteva un'area continentale estesa.

(2) Rovereto G., *Geomorfologia Valli Liguri*, pag. 63.

Quando siasi verificato non si può ancora dire con sicurezza: dove è la sua zona di nascimento, abbiamo a Bogliasco un terrazzo che comincia a qualche diecina di metri sul mare, dovuto, con tutta probabilità, al movimento eustatico del tirrenense, e che in brev e spazio, ossia solo dopo 8 Km., in corrispondenza della collina di San Francesco d'Albaro, è di già sollevato a m. 100; per questo incliniamo a credere che il fenomeno corrisponda alla espansione glaciale del wurmiense, della quale avrebbe favorito il deflusso e l'azione esarante, e quindi al fluvio-glaciale dell'*arenaense* (1).

È certo, che di esso bisognerà tener conto ogni qualvolta si studierà, nelle Alpi Occidentali, lo spostamento delle soglie di sbocco delle valli, il terrazzamento e il colmamento delle stesse; fenomeni erosivi che, se inframontuosi, non sempre vanno d'accordo con quelli similari della pianura.

Biologia vegetale. — *Sulle ghiandole fogliari del pesco, in relazione anche alla costituzione del fiore.* Nota preventiva di C. Campbell, presentata dal Socio R. Pirotta.

Sulle ghiandole fogliari del pesco, da tempo si è fermata l'attenzione dei Pomologi, più tardi quella dei Botanici, con ricerche essenzialmente o quasi istologiche e fisiologiche, con scarsità di ricerche biologiche, intese a fissare la funzione delle ghiandole nell'economia vegetale.

I Pomologi, dalla diversa forma di esse, si sono serviti per tentativi di classificazione, non riusciti, secondo me, solo perchè non si comprese il valore delle forme dubbie od intermedie, e non si posero in relazione i caratteri delle ghiandole con altri caratteri ben definiti della pianta.

Fissata da me l'attenzione sulla forma fiorale, stabilite le due forme tipiche (longipetala e brevipetala) con varie forme intermedie (mediopetala) di origine molto probabilmente ibrida, non mi riuscì difficile trovare una relazione tra le ghiandole fogliari e la forma del fiore, tenendo presenti anche i precedenti lavori di tentativi di classificazione, così da poter trovare nella relazione fra i vari caratteri, la distinzione delle forme pure dalle ibride.

Se si è però molto fissata l'attenzione sulla forma delle ghiandole fogliari, non altrettanto si è fermata sulla loro funzione biologica, tolte le osservazioni del prof. Delpino, che, anche per il pesco, vi attribuisce la funzione mirmecofila. Il fatto da me constatato, che non vi ha relazione tra presenza o meno delle ghiandole, e quella di parassiti, perchè piante prive di ghiandole sono spesso colpite meno delle piante che ne sono provviste, farebbe

(1) L'esclusione dell'arenaense, con tanto acume distinto dal Pareto, dal quadro cronologico del quaternario, è stata una di quelle solite rinunzie nostre, sulle quali si dovrà ritornare.

mettere in dubbio la funzione protettiva indiretta delle ghiandole, per quanto riguarda il richiamare le formiche, contro i danni prodotti da insetti. Ma un'altra osservazione continuata mi fa pensare che alle ghiandole fogliari sia riservata altra o varia funzione. È noto come uno degli insetti che più danneggiano il pesco sia l'*Anuraphis persicae* Bog., e contro esso spesso fallisca l'opera del coltivatore. Secondo il Delpino gli afidi, con pochi altri insetti, si troverebbero nei formicai, ove starebbero sotto la protezione delle formiche. Come va allora che piante di pesco provviste di ghiandole, sono fortemente colpite da afidi e piante totalmente sprovviste di ghiandole, non lo sono? Le formiche in tale caso sarebbero attirate dalle ghiandole per proteggere gli afidi, funzione certamente non benefica per la pianta. Ma quale bisogno avrebbero le formiche delle ghiandole, potendo nutrirsi della materia zuccherina secreta dagli afidi? E perchè piante non provviste di ghiandole, non sono alla loro volta colpite da afidi? Pare dunque evidente la mancanza di relazione, almeno in questo caso, tra afidi, formiche, e ghiandole, in quanto afidi e ghiandole dovrebbero fornire il nutrimento alle formiche. Ed ancora, come va che piante ricchissime di ghiandole, sono in modo notevole invase da afidi, mentre non ne sono spesso invase le piante sprovviste di ghiandole? Dalle osservazioni fatte sulle piante da me studiate con foglie sprovviste di ghiandole, risulta ancora la maggiore resistenza delle stesse contro note micosi.

Il pesco è provvisto di stipole fogliari, descritte e figurate già dal Malpighi, le quali nelle piante fornite di ghiandole fogliari, sono ricchissime di ghiandole nella loro dentatura. Esse cadono col processo di lignificazione del ramo, e la loro caduta coincide con la caduta o con la cessata funzionalità delle ghiandole fogliari, siano esse tipiche, o quelle della dentatura fogliare. Ma col processo di maturazione del ramo, cadono anche nelle piante con foglie sprovviste di ghiandole, le stipole caratteristiche per la loro forma pettinata, a cui corrisponde nella lamina fogliare una più marcata dentatura.

Anche questi fatti, come i precedenti, fanno seriamente pensare che il problema della funzione delle ghiandole fogliari attende ancora la sua decisiva soluzione.

***

Le ghiandole fogliari del pesco furono già distinte in *globose* e *reniformi*. Più recentemente Gregory divise le reniformi in *reniformi grandi*, *reniformi*, *reniformi piccole*; e solo in un caso distinse nelle globose le *globose piccole*. Ma Carrière da tempo aveva riconosciuto che in una medesima pianta si potevano trovare le due forme, la globosa e la reniforme, ed io l'ho riscontrato in più d'una varietà.

Lo studio delle ghiandole in piante di varietà diverse mi fece chiaramente notare, che la forma di quelle delle foglie primaverili diversifica

spesso un poco da quella delle foglie autunnali, e che tra le due forme tipiche, vi sono numerose forme intermedie, spesso non ben definite. Molto probabilmente queste forme sono ibride, come probabilmente debbono considerarsi ibridi i casi in cui si notano le due forme di ghiandole sulla stessa pianta e non raramente sulla stessa foglia.

Dalla forma globosa tipica, che si ha nel mandorlo, e che si trova in alcuni peschi, alla reniforme tipica di altri peschi, si passa per gradi con una quantità di forme intermedie, cosicchè si rimane spesso indecisi, per fissare a quali delle due forme più si avvicini quella in esame, e quale abbia il predominio. Conviene ancora notare che con la maturità dei tessuti le ghiandole modificano la forma, cosicchè la globosa può essere erroneamente confusa con la reniforme, specie nelle forme da ritenersi meno pure.

Variabilissimo è il numero delle ghiandole, sopra una stessa foglia, e sulla stessa pianta da foglia a foglia; come pure variabilissima è la posizione di esse sul picciolo o alla base della foglia.

Interessa ora far rilevare la relazione che passa tra la forma delle ghiandole e quella del fiore, desunta tanto dalle notizie date dagli autori che si sono occupati della cosa, quanto direttamente dalle osservazioni fatte sulla collezione di 90 varietà di pesco che coltivo a scopo sperimentale.

Riservandomi di esporre in altra occasione tutti i dati da me rilevati, mi limito ora a ricordare che nella forma fiorale longipetala, si ha il carattere dominante di ghiandole reniformi, nella forma brevipetala, quello di globose; nella forma fiorale mediopetala, una mescolanza delle due forme, in proporzioni quasi eguali.

Ho poi osservato nella pesca-noce la stessa corrispondenza di caratteri, tra forma del fiore e ghiandole; e in un ibrido di pesco-mandorlo mediopetalo longistilo, ghiandole reniformi molto piccole e globose.

La constatazione pare a me abbia importanza, per stabilire la purezza o meno di una varietà, in opera specialmente di selezione. Così pare venga a cadere l'opinione sulla probabile origine del pesco dal mandorlo, in quanto, se il mandorlo ha ghiandole globose, mentre tale caratteristica è più propria del pesco brevipetalo, tanto ben differenziato dal mandorlo, il pesco longipetalo, la cui forma fiorale tanto più ricorda quella del mandorlo, ha predominanza di ghiandole fogliari così tipicamente distinte da esso, da dovere convenire che pesco e mandorlo sieno specie nettamente distinte differenziate anche dalla forma delle ghiandole fogliari.

Merita notare, che le specie del genere *Prunus*, hanno ghiandole più o meno rotondeggianti, quindi anche le forme coltivate dell'albicocco, del susino, del ciliegio ecc.; di modo che la ghiandola reniforme viene a nettamente distinguersi da tutte le altre.

Resta da stabilire quale posto spetti alle varietà con foglie prive di ghiandole. A questo proposito giova ricordare che l'*Amygdalus persicoides*

del Caucaso, ha foglie sprovviste di ghiandole, più marcatamente dentate, e stipole pettinate, come in alcune varietà di pesco; e ciò permette di supporre, che malgrado l'azione colturale, il pesco coltivato conservi ancora caratteristiche morfologiche di specie o forme selvatiche ben distinte, dalle quali il pesco coltivato deve avere avuto origine, confuse di regola con casuali ibridismi conservati per propagazione.

È certo utile ancora considerare come mentre nelle altre specie coltivate del genere *Prunus*, la forma delle ghiandole si mantiene costante o quasi nelle diverse varietà; nel pesco si ha una mescolanza di caratteri molto maggiore, forse dovuta a maggior facilità di ibridizioni, il che deve essere sperimentalmente dimostrato.

Anche in qualche pianta di ciliegio ho osservate ghiandole reniformi piuttosto piccole, da farmi maggiormente considerare l'importanza di estendere le ricerche, per stabilire la forma tipica della specie, la maggiore o minore facilità di ibridazione e con quale specie affine, e il valore da attribuirvi nella classificazione delle varietà.

Da quanto sopra ho esposto appare evidente come le ricerche morfologiche e biologiche, debbano venire validamente in soccorso della frutticoltura razionale, e come solo in base ad esse debba procedere l'opera di selezione e rigenerazione, che la frutticultura attende.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Pirotta, relatore, a nome anche del Socio Mattirolo, legge una relazione sulla Memoria: *Sfagnologia italiana* di A. Bottini, concludendo col proporre la inserzione del predetto lavoro nei volumi dell'Accademia.

Alla stessa conclusione giunge una relazione del Socio De Stefani, relatore, trasmessa a nome anche del Corrisp. De Marchi, per la Memoria dell'ing. V. Sabatini, intitolata: *Il rilievo vulcanico generato da uno o da due punti esplosivi.*

E finalmente il Corrisp. F. Millosevich, legge una relazione, a nome anche del Socio Artini, che propone la stampa della Memoria del dott. P. Comucci, *Zolfo sull'Antinomite dell'isola di Taso.*

Le proposte delle Commissioni esaminatrici sopra indicate, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Segretario Millosevich, a nome del Socio Carlo De Stefani, legge la seguente Commemorazione del Corrispondente prof. Giovanni Di Stefano:

Giovanni Di Stefano, Socio Corrispondente della nostra Accademia fino dal 15 luglio 1904, era stato proposto ad unanimità dalla Classe come Socio Nazionale, e confidavano i proponenti che il suo nome sarebbe stato da voi tutti acclamato con riconoscenza per i suoi pazienti e diuturni lavori.

Ma nell'intervallo di tempo, il 3 gennaio 1917, una fine improvvisa colpiva l'uomo, giovane ancora, ma provato dalle dure fatiche del geologo indagatore e dai gravi dolori che negli ultimi anni avevano rattristato l'animo suo. Era nato in Santa Ninfa, provincia di Trapani, il 25 febbraio 1856 e laureato in Scienze naturali in Palermo nel 1882 con un lavoro sulla *Fauna titonica di Termini Imerese*. Degno allievo di G. G. Gemmellaro, che nel 1883 lo propose a suo assistente, andò due semestri a Vienna a perfezionarsi in Geologia e Paleontologia con M. Neumayr ed E. Suess. Al ritorno, confermato assistente di Geologia e Mineralogia nell'Università di Palermo, passò, nel 1890, Paleontologo del R. Ufficio geologico e nel 1903 fu nominato professore di Geologia nell'Università di Catania, donde, l'anno seguente, passò a quella di Palermo nella cattedra del suo defunto maestro.

Sedotto fin da giovane dalle scienze naturali, fermamente deciso di dedicare tutta la sua vita alla storia della Terra, così fece, guidato costantemente da una triplice idealità: la semplicità, il dovere, il lavoro.

Percorse per suoi studî varie parti d'Italia e fu pure in Egitto e in Arabia.

I suoi numerosi lavori, lungamente ponderati e studiati, si può dire abbiano l'impronta della perfezione in quanto possa darla un lavoro umano: ma non aveva l'ambizione di passare soltanto per erudito; bensì pensava al suo paese d'Italia, a rendere più grande la sua patria amata, delle cui sorti fiducioso mi scriveva pure nel dicembre, poc'anzi alla sua fine, addolorato ma non affranto dai sacrifici che la sua famiglia aveva fatto alla patria stessa.

Principalmente illustrò i terreni della Sicilia: quando per sempre la penna cadde dalle sue mani, aveva quasi pronta una magistrale illustrazione del Trias. L'opera scientifica di G. Di Stefano sarà continuata e completata; ma il suo nome resterà sempre ricordato fra quelli dei principali e fondamentali descrittori della sua isola diletta e dell'Italia meridionale.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste varie Memorie d'idraulica del Corrispondente Fantoli, alcuni opuscoli del Corrisp. C. Guidi, uno scritto del prof. Berlese, intitolato: *Centuria quarta di Acari nuovi,* e infine il volume III del Manuale di Fisica del prof. Dessau, che tratta dell'*Elettrologia,* offerto in omaggio all'Accademia.

AFFARI DIVERSI

Il Vicepresidente Ròiti presenta un piego suggellato, trasmesso dal prof. C. Del Lungo, perchè sia conservato negli archivi dell'Accademia.

Il Vicepresidente prof. Ròiti, prendendo l'occasione esser questa l'ultima seduta di Classe dell'anno accademico, mentre porge un saluto affettuoso ai Colleghi, fa con alto accento patriottico i più caldi auguri perchè, nel corso delle ferie, le sorti della lotta titanica d'oggi, fra la violenza e il diritto, volgano più propizie ai nostri santi ideali. Gl'italiani, soggiunge il Vicepresidente, non deporranno le armi finchè la vittoria non coroni l'immane sforzo del mondo a vantaggio della indipendenza dei popoli e delle nazioni; disposti, ove sia necessario, a sostenere più duri sagrifici con indomita fermezza. Propone infine l'invio di un telegramma di ossequio e di augurî a S. M. il Re, e la proposta è accolta dagli unanimi applausi degli accademici.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 giugno 1918.

Ascoli A. — Diagnosi batteriologica nella dissenteria. Modena, 1918. 8°, pp. 1-5.

Berlese A. — Centuria quarta di Acari nuovi (Estr. dal « Redia », vol. XIII, pp. 115-192). Firenze, 1918. 8°.

Dessau B. — Manuale di fisica, vol. I-III, elettrologia. Milano. 1918. 8°, pp. 1-760.

Fantoli G. — Italia e Dalmazia (articolo stampato nel giornale « Il Popolo d'Italia » del 25-I-18). Roma.

Fantoli G. — Linee segnalatrici della possibilità climatica e loro applicazione idraulica. Roma. 1918. 8°, pp. 1-16.

Fantoli G. — Relazione al Consiglio Superiore delle acque sul servizio idrografico in Italia e sulla necessità di un rinnovato ordinamento di esso (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », anno LV, pp. 1-16). Roma, 1917. 8°.

Fantoli G. — Relazione generale della Commissione pel riparto D'Adda fra Muzza, Retorto e Roggio di Cassano. Milano, 1918. 4°, pp. 1-31.

Guidi C. — Sul calcolo dell'arco elastico senza cerniere (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LIII, pp. 149-154). Torino, 1917. 8°.

Guidi C. — Sulle dighe a volta, Nota II (Estr. dal « Giornale del Genio civile », anno LVI, 1918, pp. 1-13). Roma, 1918. 8°.

Guidi C. — Sulle dighe a volta, Nota III (Estr. dal « Giornale del Genio civile », a. LVI, 1918, pp. 1-11). Roma, 1918. 8°.

Guidi C. — Sulla sicurezza delle dighe di sbarramento. Torino, 1918. 8°, fol.

Leonardi G. — Terza contribuzione alla conoscenza delle cocciniglie italiane (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'Agricoltura in Portici », vol. XII, pp. 188-216). Portici, 1918. 8°.

Mibinny L. — Cosmonomie (théorie de l'Univers), aperçu élémentaire abrégé. Paris, 1918. 12°, pp. 1-38.

Oppermann A. — Note sur le quadrilatère complet. Paris, 1918. 8°, pp. 1-27.

Ronchetti V. — Contributo alla casistica della spondilite sifilitica. Considerazioni circa l'importanza clinica della reazione di Bordet-Wasserman (Estr. dal « Pensiero medico », n. 44-45, pp. 1-30). Milano, 1917. 8°.

Ronchetti V. — Contributo allo studio della così detta « Malattia di Madelung » (Estr. dal « Pensiero medico », n. 8-9, pp. 1-12). Milano, 1918. 8°.